

## 構造物の動的応答を考慮した最適化問題

菊田 征勇<sup>\*1</sup>・松井 邦人<sup>\*2</sup>・新延 泰生<sup>\*3</sup>

### Optimal Design of Structures Subject to Dynamic Loadings

By Yukio Kikuta<sup>\*1</sup>, Kunihiro Matsui<sup>\*2</sup> and Yasuo Niinobe<sup>\*3</sup>

**Synopsis:** Studies on the optimal design of structures subject to static loadings have been reported many times for last 20 years. Nevertheless, the optimal design of structures under dynamic loadings were scarcely researched.

In this study a method of the optimal design of structures subjected to external time dependent forces such as traffic loadings and seismic forces is presented.

The main idea of the procedure used herein lies in the distinction between design variables and state variables, and reduces the original optimal problem by eliminating the latter variables with the use of adjoint relationship of the equations of motion.

Moreover, sensitive analysis is carried which gives relationship between perturbation of the design variables and the changes of cost function and constraints.

As example problems, minimum weight designs of beams and trusses under dynamic loadings are so solved and the results are presented.

**要旨:** 静的荷重を受ける構造物の最適化に関する研究は過去20年程の間に数多くなされてきている。しかし、動的荷重を受ける構造物の最適化に関する研究は数が少なく、ここでは走行荷重とか地震力とかのように、時間に依存する外力を受ける構造物の最適化についての一手法を提案する。この手法の特徴として、変数を設計変数と状態変数とに分離し、運動方程式の随伴形を用いて状態変数を消去することにより、元の最適化問題の縮約を行っている。また、設計変数の変化量と目的関数や拘束条件の変化量との関係が分かる感度解析を行っている。さらに、ここに提案する方法を用いて、動的荷重を受けるはりおよびトラスの最小重量設計を行い、その結果を示す。

#### 1. ま え が き

構造物の最適化に関しては、1960年以降 Schmit<sup>1)</sup> 等により数多くの研究がなされてきている。しかしながらそのほとんどの場合、荷重の大きさや作用位置が時間的に変化しない静荷重を受ける状態での構造物の最適化である。ところで一般に、静荷重だけでなく、走行荷重や

衝撃力あるいは地震力等の動荷重を受ける構造物も多く存在するが、このような動荷重下での最適化に関する研究は数が少ない。またそれらは、振動問題として構造物の固有振動数を取り扱っており、構造物の動的応答量を直接的には取り扱っていない<sup>2), 3), 5), 6)</sup>。

本研究は、構造物が時間に依存する外力や慣性力を受ける場合に、その構造物の動的応答量を拘束条件あるいは目的関数に取り入れて、構造物の最適化を行う手法を提案し、その有効性を示すものである<sup>14), 15)</sup>。

この手法の特徴は、i) 動的状態での構造物の最適化も通常の静的状態での最適化<sup>7)</sup>と同様に取り扱えること、ii) 変数を設計変数と状態変数とに分離し、運動方程式の随伴形を用いて状態変数を消去することにより<sup>4), 8)</sup>、元の最適化問題の縮約を行っていること、さらに iii) 設

<sup>\*1</sup> 土木工学科 助教授

Associate Professor, Civil Engineering Division

<sup>\*2</sup> 東京電機大学理工学部建設工学科 助教授 Ph. D.  
Associate Professor, Dept. of Civil and Structural  
Engineering, Tokyo Denki University

<sup>\*3</sup> 東洋大学工学部土木工学科 専任講師  
Assistant Professor, Dept. of Civil Engineering, To-  
yo University

計変数の変化量と目的関数や拘束条件の変化量との関係が分かる感度解析を行っていること、等である。また、最適化手法としては Rosen の傾斜射影法 (Gradient Projection Method)<sup>9),10)</sup> を、構造解析には有限要素法を、その中で動的応答の計算には Newmark の  $\beta$  法 ( $\beta = 1/6$ )<sup>11)~13)</sup> を用いている。

## 2. 動的状態における最適化問題

動的問題においては、構造物の応力や変位を表す状態変数は、時間に依存する外力や慣性力を受ける構造物の応答であり、時間の関数である。また、断面の形状・寸法とか使用材料の力学的性質など設計者が任意に選択できる設計変数は時間に独立である。

したがって、有限個の要素に分割された構造物の運動方程式は、次のように表わされる。

運動方程式：

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{b})\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{z}(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{b}, t) \quad (1)$$

$$\text{初期条件：} \dot{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{a}_1 \quad (2)$$

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{a}_2 \quad (3)$$

ここに、

$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$ ：設計変数

$\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T$ ：

状態変数 (節点変位)

$t$ ：時間

$\dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t)$ ：時間  $t$  に関する微分

$\mathbf{M}(\mathbf{b})$ ：質量マトリックス

$\mathbf{C}(\mathbf{b})$ ：減衰マトリックス

$\mathbf{K}(\mathbf{b})$ ：剛性マトリックス

なお、 $\mathbf{M}(\mathbf{b})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{b})$ ,  $\mathbf{K}(\mathbf{b})$  は  $n$  行  $n$  列の対称マトリックスであり、 $\mathbf{M}(\mathbf{b})$  および  $\mathbf{K}(\mathbf{b})$  は正値である。

目的関数および拘束条件は、設計変数、状態変数、あるいはこの両者の関数である。最適制御の理論を用いれば、時間に依存する状態変数を含む目的関数および拘束条件は、一般に次のように表わされる<sup>2)</sup>。

$$\text{目的関数：} \phi_0 = g_0(\mathbf{b}) + \int_0^\tau h_0(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) dt \quad (4)$$

$$\text{拘束条件：} \phi_i = g_i(\mathbf{b}) + \int_0^\tau h_i(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) dt = 0 \quad (5)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, p_1$$

$$\phi_i = g_i(\mathbf{b}) + \int_0^\tau h_i(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) dt \leq 0 \quad (6)$$

$$i = p_1 + 1, p_1 + 2, \dots, p_2$$

ここに、 $\tau$  は構造物が外力の作用を受け始めてからその応答が最大に達するまでの時間であり、Fig. 1 に示す通りである。

したがって、ここで定義される最適化問題は、時間  $t$

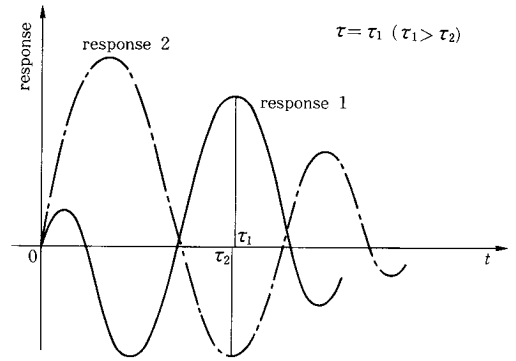


Fig. 1 Response curve

$= 0$  から  $t = \tau$  までの動的過程において、運動方程式 (1)、初期条件 (2), (3)、拘束条件 (5), (6) を満足して、かつ目的関数 (4) を最小にするものである。

ところで、今回取り扱う問題を具体的に言えば、目的関数は構造全体の重量であり、設計変数  $\mathbf{b}$  は部材の断面積である。また拘束条件は、部材応力、節点変位、および部材断面積である。これらの拘束条件は次のように表わされる。すなわち、 $\boldsymbol{\eta}^c, \boldsymbol{\eta}^s, \boldsymbol{\eta}^d$  をベクトルとして

$$\boldsymbol{\eta}^c(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) \leq 0 \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\eta}^s(\mathbf{z}(t)) \leq 0 \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\eta}^d(\mathbf{b}) \leq 0 \quad (9)$$

ここに、式 (7) は限界応力 (critical stress) に対する拘束条件であり、式 (8) は状態変数 (state variable) すなわち節点変位に関する拘束条件であり、式 (9) は設計変数 (design variable) の上限および下限を表わすような、設計変数のみからなる拘束条件である。また式 (7) ~ (9) の不等号は、ベクトル関数のそれぞれの要素に適用される。

ところで、時間に関係しない設計変数に関する拘束条件は、式 (6) の中で時間  $t$  に関する積分項を除いた式に対応しているが、時間に依存する応力および変位に関する拘束条件は、式 (5) あるいは (6) の形では表わされないため、次のように書き直す。すなわちこれ等の拘束条件を一般に

$$\boldsymbol{\eta} \leq 0 \quad (10)$$

とすれば

$$\phi = \int_0^\tau (\boldsymbol{\eta} + |\boldsymbol{\eta}|) dt = 0 \quad (11)$$

または

$$\phi = \int_0^\tau \hat{\boldsymbol{\eta}}^2 dt = 0 \quad (12)$$

ただし、

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{\eta} & \text{if } \boldsymbol{\eta} \geq 0 \\ \hat{\boldsymbol{\eta}} = 0 & \text{if } \boldsymbol{\eta} < 0 \end{cases}$$

式(10)と式(11)または(12)が等価であるかどうかは厳密には問題があるが、少なくとも式(10)が成立すれば、式(11)または(12)が成立することは確かである。式(11)あるいは(12)は式(5)に対応し、動的状態における最適化問題を取り扱うことができる。

式(12)を用いて式(7), (8)を書き直すと、これらは式(5)の第1項のない形であり、 $\phi^c$ ,  $\phi^s$  をベクトルとして

$$\phi^c = \int_0^{\tau} \mathbf{h}^c(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) dt = \int_0^{\tau} \hat{\mathbf{q}}^c(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) dt = 0 \quad (13)$$

ただし、

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}^c(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) = \mathbf{q}^c(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) & \text{if } \mathbf{q}^c(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) \geq 0 \\ \hat{\mathbf{q}}^c(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) = 0 & \text{if } \mathbf{q}^c(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}) < 0 \end{cases}$$

$$\phi^s = \int_0^{\tau} \mathbf{h}^s(\mathbf{z}(t)) dt = \int_0^{\tau} \hat{\mathbf{q}}^s(\mathbf{z}(t)) dt = 0 \quad (14)$$

ただし、

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{q}}^s(\mathbf{z}(t)) = \mathbf{q}^s(\mathbf{z}(t)) & \text{if } \mathbf{q}^s(\mathbf{z}(t)) \geq 0 \\ \hat{\mathbf{q}}^s(\mathbf{z}(t)) = 0 & \text{if } \mathbf{q}^s(\mathbf{z}(t)) < 0 \end{cases}$$

となる。また式(9)は、式(6)の第2項のない形であり、 $\phi^d$  をベクトルとして

$$\phi^d = \mathbf{g}^d(\mathbf{b}) = \mathbf{q}^d(\mathbf{b}) \leq 0 \quad (15)$$

と書き表わされる。

以上のことから、動的荷重を受ける構造物の最適設計問題は、式(4)～(6)で定式化される最適制御問題に置き換えられる。

### 3. 感度解析

ここに述べる最適設計問題は、式(1)～(3), (5), (6)を満足し、式(4)を最小にする設計変数  $\mathbf{b}$  を求めることであり、この最適化の過程は必然的に繰り返し計算をすることになる。まず適当な初期値  $\mathbf{b}^{(0)}$  を仮定し、繰り返しの過程で設計変数  $\mathbf{b}$  の微小変化量  $\delta \mathbf{b}$  を求めながら  $\mathbf{b}$  を改良して行くのであるが、構造物が安定な挙動を示すと考えられる限り、設計変数の微小変化による状態変数  $\mathbf{z}(t)$  の変化  $\max |\delta \mathbf{z}(t)|$  も十分小さいと考えて差し支えない。

また、 $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{z}(t)$  がそれぞれ  $\delta \mathbf{b}$ ,  $\delta \mathbf{z}(t)$  変化すると、目的関数および拘束条件は

$$\delta \phi_i = \mathbf{g}_{i,b} \delta \mathbf{b} + \int_0^{\tau} (\mathbf{h}_{i,b} \delta \mathbf{b} + \mathbf{h}_{i,z} \delta \mathbf{z}(t)) dt \quad (16)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, p_2$$

だけ変化する。ここに、 $\mathbf{g}_{i,b}$ ,  $\mathbf{h}_{i,b}$  はそれぞれ  $\mathbf{g}_i(\mathbf{b})$ ,  $\mathbf{h}_i(\mathbf{z}(t), \mathbf{b})$  の  $\mathbf{b}$  に関する微分であり、 $\mathbf{h}_{i,z}$  は  $\mathbf{h}_i(\mathbf{z}(t), \mathbf{b})$  の  $\mathbf{z}(t)$  に関する微分である。また式(1)～(3)は

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}})_b \delta \mathbf{b} + \mathbf{M}\delta \ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}})_b \delta \mathbf{b} + \mathbf{C}\delta \dot{\mathbf{z}} \\ + (\mathbf{K}\mathbf{z})_b \delta \mathbf{b} + \mathbf{K}\delta \mathbf{z} = \mathbf{Q}_b \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\delta \mathbf{z}(0) = 0 \quad (18)$$

$$\delta \dot{\mathbf{z}}(0) = 0 \quad (19)$$

となる。

ところで、式(13)から  $\delta \mathbf{z}(t)$  が消去できれば、設計変数の変化量  $\delta \mathbf{b}$  と式(4)～(6)の変化量  $\delta \phi_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, p_2$ ) との間に直接的な関係が生じる。この消去の過程を次に示す。

まず、変数  $\lambda_i(t)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, p_2$ ) を

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{b})\dot{\lambda}_i(t) - \mathbf{C}(\mathbf{b})\dot{\lambda}_i(t) + \mathbf{K}(\mathbf{b})\lambda_i(t) \\ = -\mathbf{h}_i(\mathbf{z}(t), \mathbf{b}), \mathbf{z}(t)^T \end{aligned} \quad (20)$$

$$\lambda_i(\tau) = 0 \quad (21)$$

$$\dot{\lambda}_i(\tau) = 0 \quad (22)$$

の解とする。式(17)の  $\mathbf{Q}_b \delta \mathbf{b}$  を左辺に移項し、 $\lambda_i(t)^T$  を左から掛けて、時間  $t = 0$  から  $t = \tau$  まで積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \lambda_i^T \{ (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}})_b \delta \mathbf{b} + \mathbf{M}\delta \ddot{\mathbf{z}} + (\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}})_b \delta \mathbf{b} + \mathbf{C}\delta \dot{\mathbf{z}} \\ + (\mathbf{K}\mathbf{z})_b \delta \mathbf{b} + \mathbf{K}\delta \mathbf{z} - \mathbf{Q}_b \delta \mathbf{b} \} dt = 0 \end{aligned}$$

この中で  $\lambda_i^T \mathbf{M}\delta \ddot{\mathbf{z}}$ ,  $\lambda_i^T \mathbf{C}\delta \dot{\mathbf{z}}$  について部分積分を行い、式(18), (19), (21), (22)を考慮すると

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \{ \lambda_i^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}})_b \delta \mathbf{b} + \dot{\lambda}_i^T \mathbf{M}\delta \mathbf{z} + \lambda_i^T (\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}})_b \delta \mathbf{b} \\ - \dot{\lambda}_i^T \mathbf{C}\delta \mathbf{z} + \dot{\lambda}_i^T (\mathbf{K}\mathbf{z})_b \delta \mathbf{b} + \lambda_i^T \mathbf{K}\delta \mathbf{z} \\ - \lambda_i^T \mathbf{Q}_b \delta \mathbf{b} \} dt = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

また、式(20)を転置して右から  $\delta \mathbf{z}(t)$  を掛けると

$$\dot{\lambda}_i^T \mathbf{M}\delta \mathbf{z} - \dot{\lambda}_i^T \mathbf{C}\delta \mathbf{z} + \lambda_i^T \mathbf{K}\delta \mathbf{z} = -\mathbf{h}_{i,z} \delta \mathbf{z} \quad (24)$$

式(24)を式(23)に代入して整理すると

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} \mathbf{h}_{i,z} \delta \mathbf{z} dt = \int_0^{\tau} \lambda_i^T \{ (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}})_b + (\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}})_b \\ + (\mathbf{K}\mathbf{z})_b - \mathbf{Q}_b \} \delta \mathbf{b} dt \end{aligned} \quad (25)$$

となり、式(25)を式(16)に代入すると

$$\begin{aligned} \delta \phi_i = (\mathbf{g}_{i,b} + \int_0^{\tau} [\mathbf{h}_{i,b} + \lambda_i^T \{ (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}})_b + (\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}})_b \\ + (\mathbf{K}\mathbf{z})_b - \mathbf{Q}_b \}] dt) \delta \mathbf{b} \\ = \mathbf{l}_i^T \delta \mathbf{b} \end{aligned} \quad (26)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, p_2$$

$$\begin{aligned} \text{ただし、} \mathbf{l}_i^T = \mathbf{g}_{i,b} + \int_0^{\tau} [\mathbf{h}_{i,b} + \lambda_i^T \{ (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}})_b + (\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}})_b \\ + (\mathbf{K}\mathbf{z})_b - \mathbf{Q}_b \}] dt \end{aligned} \quad (27)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, p_2$$

である。式(26)は設計変数  $\mathbf{b}$  が微量  $\delta \mathbf{b}$  だけ変化すると、目的関数および拘束条件がどれだけ変化するかを表わしており、 $\mathbf{l}_i$  を感度ベクトル (sensitive vector) と呼ぶ。

### 4. 最適化計算

2. で定義された問題を解く手法として Rosen の傾斜射影法 (Gradient Projection Method)<sup>9), 10)</sup> を用いる。まず設計変数  $\mathbf{b}^{(0)}$  を仮定し、 $\mathbf{b}^{(0)}$  が拘束条件の形成する傾

域（実行可能領域）の外にあるとすると、次のステップで設計変数をその実行可能領域に戻し、かつ目的関数が減少するように設計変数  $\delta \mathbf{b}$  の変化量を選べば良いわけである。

したがって、 $\delta \mathbf{b}$  を求める際必要となる拘束条件は、式(5)、(6)の中で条件を満足しない式だけであるが、式(5)は等号拘束条件であるから常に満足しないと考えてよいが、式(6)は不等号拘束条件なので条件を満足する場合があり、その場合にはその条件式を拘束条件から除かなければならない。そのようにして得られた拘束条件式を

$$\phi = \{\phi_i | i = 1, 2, \dots, p_1\} \quad (28)$$

$$\bar{\phi} = \{\phi_i | i \in A\} \quad (29)$$

ただし、

$$A = \{i | i > p_1 \text{ for which } \phi_i \geq 0\}$$

で表わす。

拘束条件を満足するように修正する条件式は、今回取り扱う問題では、式(13)～(15)から

$$\delta \phi^c = \frac{\partial \phi^c}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b} + \frac{\partial \phi^c}{\partial \mathbf{z}} \delta \mathbf{z} = \Delta \phi^c \quad (30)$$

$$\delta \phi^s = \frac{\partial \phi^s}{\partial \mathbf{z}} \delta \mathbf{z} = \Delta \phi^s \quad (31)$$

$$\delta \bar{\phi}^d = \frac{\partial \bar{\phi}^d}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b} \leq \Delta \bar{\phi}^d \quad (32)$$

となる。ここに、 $\Delta \phi$ ,  $\Delta \bar{\phi}$  は拘束条件を満足するための修正量で

$$\Delta \phi = -\phi \quad (33)$$

$$\Delta \bar{\phi} = -\bar{\phi} \quad (34)$$

である。しかしながら、 $\delta \mathbf{z}$  を消去した式(26)を用いると、式(30)、(31)は次のように書き直される。

$$\mathbf{l}^{cT} \delta \mathbf{b} = \Delta \phi^c \quad (35)$$

$$\mathbf{l}^{sT} \delta \mathbf{b} = \Delta \phi^s \quad (36)$$

ここに

$$\mathbf{l}^{cT} = \int_0^t [\mathbf{h}^c, \mathbf{b} + \lambda^{\phi cT} \{(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}), \mathbf{b} + (\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}), \mathbf{b} + (\mathbf{K}\mathbf{z}), \mathbf{b} - \mathbf{Q}, \mathbf{b}\}] dt \quad (37)$$

$$\mathbf{l}^{sT} = \int_0^t \lambda^{\phi sT} \{(\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}}), \mathbf{b} + (\mathbf{C}\dot{\mathbf{z}}), \mathbf{b} + (\mathbf{K}\mathbf{z}), \mathbf{b} - \mathbf{Q}, \mathbf{b}\} dt \quad (38)$$

であり、式(20)～(22)を参照すれば、 $\lambda^{\phi c}$  は

$$\mathbf{M}\ddot{\lambda}^{\phi c} - \mathbf{C}\dot{\lambda}^{\phi c} + \mathbf{K}\lambda^{\phi c} = -\mathbf{h}^c, \mathbf{z}^T \quad (39)$$

$$\lambda^{\phi c}(\tau) = 0 \quad (40)$$

$$\dot{\lambda}^{\phi c}(\tau) = 0 \quad (41)$$

の解であり、また  $\lambda^{\phi s}$  は

$$\mathbf{M}\ddot{\lambda}^{\phi s} - \mathbf{C}\dot{\lambda}^{\phi s} + \mathbf{K}\lambda^{\phi s} = -\mathbf{h}^s, \mathbf{z}^T \quad (42)$$

$$\lambda^{\phi s}(\tau) = 0 \quad (43)$$

$$\dot{\lambda}^{\phi s}(\tau) = 0 \quad (44)$$

の解として求められる。また

$$\Delta \phi^c = -\phi^c = -\int_0^t \mathbf{h}^c dt \quad (45)$$

$$\Delta \phi^s = -\phi^s = -\int_0^t \mathbf{h}^s dt \quad (46)$$

である。

また、式(32)は次のように書き直される。

$$\bar{\mathbf{l}}^{d^T} \delta \mathbf{b} \leq \Delta \bar{\phi}^d \quad (47)$$

ここに

$$\bar{\mathbf{l}}^{d^T} = \mathbf{g}^{d, \mathbf{b}} \quad (48)$$

$$\Delta \bar{\phi}^d = -\bar{\phi}^d = -\bar{\mathbf{g}}^d \quad (49)$$

したがって、以上をまとめると、 $\delta \mathbf{b}$  を求めることは次の問題を解くことに帰着する。すなわち

$$\text{目的関数: } \delta \phi_0 = \mathbf{l}_0^T \delta \mathbf{b} \rightarrow \text{最小化} \quad (50)$$

$$\text{拘束条件: } \delta \phi_i = \mathbf{l}_i^T \delta \mathbf{b} - \Delta \phi_i = 0 \quad (51)$$

$$i = 1, 2, \dots, p_1$$

$$\delta \bar{\phi}_i = \bar{\mathbf{l}}_i^T \delta \mathbf{b} - \Delta \bar{\phi}_i \leq 0 \quad (52)$$

$$i \in A$$

$$\delta \mathbf{b}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{b} - \mu^2 \leq 0 \quad (53)$$

式(1)、(4)～(6)は、設計変数  $\mathbf{b}$  および状態変数  $\mathbf{z}(t)$  に関し一般に非線形となるが、それ等の式の摂動を  $\delta \mathbf{b}$  の1次で近似しているため、 $\|\delta \mathbf{b}\|$  は十分小さくなければならない。したがって式(53)が必要になる。 $\mu^2$  は十分に小さな正数である。また  $\mathbf{W}$  は重み行列(weight matrix)で、一般に対角行列である。

ラグランジェ関数  $L$  を導入すると、式(50)～(53)は次のように表わせる。

$$L = \mathbf{l}_0^T \delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\gamma}_1^T (\mathbf{l}^T \delta \mathbf{b} - \Delta \phi) + \boldsymbol{\gamma}_2^T (\bar{\mathbf{l}}^T \delta \mathbf{b} - \Delta \bar{\phi}) + \nu (\delta \mathbf{b}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{b} - \mu^2) \quad (54)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \nu: \text{ラグランジェ乗数}$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1 = \{\gamma_i | i = 1, 2, \dots, p_1\} \text{ かつ } \gamma_1 \neq 0$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2 = \{\gamma_i | i \in A\} \text{ かつ } \gamma_2 \geq 0$$

$$\nu \geq 0$$

$$\mathbf{l} = \{\mathbf{l}_i | i = 1, 2, \dots, p_1\}$$

$$\Delta \phi = \{\Delta \phi_i | i = 1, 2, \dots, p_1\}$$

$$\bar{\mathbf{l}} = \{\bar{\mathbf{l}}_i | i \in A\}$$

$$\Delta \bar{\phi} = \{\Delta \bar{\phi}_i | i \in A\}$$

である。

Kuhn-Tucker の必要条件により

$$\mathbf{l}_0^T + \boldsymbol{\gamma}_1^T \mathbf{l}^T + \boldsymbol{\gamma}_2^T \bar{\mathbf{l}}^T + 2\nu \delta \mathbf{b}^T \mathbf{W} = 0 \quad (55)$$

$$\mathbf{l}^T \delta \mathbf{b} - \Delta \phi = 0 \quad (56)$$

$$\bar{\mathbf{l}}^T \delta \mathbf{b} - \Delta \bar{\phi} = 0 \quad (57)$$

$$\delta \mathbf{b}^T \mathbf{W} \delta \mathbf{b} - \mu^2 = 0 \quad (58)$$

式(55)から、 $\nu \neq 0$  として

$$\delta \mathbf{b} = -\frac{1}{2\nu} \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{l}_0 + \mathbf{l} \mathbf{r}_1 + \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{r}_2) \quad (59)$$

式(59)を式(56), (57)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l} \mathbf{r}_1 + \mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{r}_2 &= -\mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l}_0 - 2\nu \Delta \phi \\ \tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l} \mathbf{r}_1 + \tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{r}_2 &= -\tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l}_0 - 2\nu \Delta \tilde{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_{11} + 2\nu \mathbf{r}_{12} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_{21} + 2\nu \mathbf{r}_{22} \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

として, 式(60)に代入し, 辺々比較して

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l} \mathbf{r}_{11} + \mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{r}_{21} &= -\mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l} \mathbf{r}_{12} + \mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{r}_{22} &= -\Delta \phi \\ \tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l} \mathbf{r}_{11} + \tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{r}_{21} &= -\tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l}_0 \\ \tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l} \mathbf{r}_{12} + \tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{r}_{22} &= -\Delta \tilde{\phi} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

したがって,  $\mathbf{r}_{11} \sim \mathbf{r}_{22}$  は式(62)より定まる。式(61)を式(59)に代入すると

$$\delta \mathbf{b} = -\frac{1}{2\nu} \delta \mathbf{b}_1 + \delta \mathbf{b}_2 \quad (63)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \delta \mathbf{b}_1 &= \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{l}_0 + \mathbf{l} \mathbf{r}_{11} + \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{r}_{21}) \\ \delta \mathbf{b}_2 &= \mathbf{W}^{-1}(\mathbf{l} \mathbf{r}_{12} + \tilde{\mathbf{l}} \mathbf{r}_{22}) \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

である。

ところで, 式(63)を式(58)に代入すると

$$4\nu^2(\delta \mathbf{b}_2^T \mathbf{W} \delta \mathbf{b}_2 - \mu^2) - 2\nu(\delta \mathbf{b}_1^T \mathbf{W} \delta \mathbf{b}_2 + \delta \mathbf{b}_2^T \mathbf{W} \delta \mathbf{b}_1) + \delta \mathbf{b}_1^T \mathbf{W} \delta \mathbf{b}_1 = 0 \quad (65)$$

この式から,  $\mu^2$  を与えれば  $\nu$  が求まる。また  $\nu$  の求め方としては次に示す方法もある。

目的関数  $\phi_0$  の変化量は

$$\delta \phi_0 = \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b} = -\frac{1}{2\nu} \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b}_1 + \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b}_2 \quad (66)$$

と表わせる。この右辺第1項は目的関数を減少させる方向に作用するので, 目的関数の変化する割合を  $\xi$  とすれば, 第1項のみを用いて

$$\xi = \frac{\delta \phi_0}{\phi_0} = -\frac{1}{2\nu} \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{b}} \delta \mathbf{b}_1 \frac{1}{\phi_0} = -\frac{1}{2\nu} \mathbf{l}_0^T \delta \mathbf{b}_1 \frac{1}{\phi_0}$$

と表わせる。故に

$$-\frac{1}{2\nu} = \frac{\xi \phi_0}{\mathbf{l}_0^T \delta \mathbf{b}_1} \quad (67)$$

として  $\nu$  を定めることができる。したがって, 設計変数の変化量  $\delta \mathbf{b}$  は,  $\mu^2$  を与える代りに  $\xi$  を与えることにより, 式(61)~(64), および(67)から定まる。

さらに,  $\delta \mathbf{b}$  を定める別の方法を次に述べる。

式(60)を  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  について解けば

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{r}_{11}' + 2\nu \mathbf{r}_{12}' \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{r}_{21}' + 2\nu \mathbf{r}_{22}' \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{11}' &= -\mathbf{A}_1^{-1} \{ \mathbf{A}_2(\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2)^{-1} \\ &\quad \times (\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_5) + \mathbf{A}_3 \} \\ \mathbf{r}_{12}' &= -\mathbf{A}_1^{-1} \{ \mathbf{A}_2(\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2)^{-1} \\ &\quad \times (\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^{-1} \Delta \phi - \Delta \tilde{\phi}) + \Delta \phi \} \\ \mathbf{r}_{21}' &= (\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2)^{-1} (\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_5) \\ \mathbf{r}_{22}' &= (\mathbf{A}_4 - \mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{A}_2)^{-1} (\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_1^{-1} \Delta \phi - \Delta \tilde{\phi}) \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

であり,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l} \\ \mathbf{A}_2 &= \mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{l}} \\ \mathbf{A}_3 &= \mathbf{l}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l}_0 \\ \mathbf{A}_4 &= \tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \tilde{\mathbf{l}} \\ \mathbf{A}_5 &= \tilde{\mathbf{l}}^T \mathbf{W}^{-1} \mathbf{l}_0 \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

である。以上から  $\mathbf{r}_{11}' \sim \mathbf{r}_{22}'$  が定まれば, 式(63)~(67)に述べた方法と同様に,  $\delta \mathbf{b}$  を定めることができる。この方法は収束が速いことがしばしば体験されており, 次数が小さい場合には良い方法である。

## 5. 最適化のアルゴリズム

前述の解析手順を整理すると次のようになる。

- Step 1. 最適設計変数  $\mathbf{b}^{(k)}$  を選定する。ここに,  $k$  は反復回数を示す。
- Step 2. 初期条件式(2), (3)を満足するように運動方程式(1)を解いて  $\mathbf{z}(t)$  を求める。
- Step 3. 拘束条件式(5), (6)を計算し, 式(28), (29)に示す  $\phi, \tilde{\phi}$  を作る。
- Step 4. Step 3の  $\phi, \tilde{\phi}$  に対し, 式(21), (22)を満足するように運動方程式の随伴関係式(20)を解き,  $\lambda(t)$  を求める。
- Step 5. Step 3の  $\phi, \tilde{\phi}$  に対し, 式(27)から感度マトリックス  $\mathbf{l}$  を計算する。
- Step 6. 修正量  $\Delta \phi, \Delta \tilde{\phi}$  を選ぶ。一般に  $\Delta \phi = -\phi, \Delta \tilde{\phi} = -\tilde{\phi}$  とする。
- Step 7. 式(62)から  $\mathbf{r}_{11} \sim \mathbf{r}_{22}$  を求め,  $\nu (> 0)$  を選んで式(61)から  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  を計算する。 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  の中で負になる要素があれば, 式(62), (61)からそれに対応する式を除いて,  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  を計算し直す。
- Step 8. 式(64)から  $\delta \mathbf{b}_1, \delta \mathbf{b}_2$  を求め, 式(63)から  $\delta \mathbf{b}$  を計算する。
- Step 9.  $\mathbf{b}^{(k+1)} = \mathbf{b}^{(k)} + \delta \mathbf{b}$  を計算する。
- Step 10.  $\|\delta \mathbf{b}_1\|, |\phi_0^{(k+1)} - \phi_0^{(k)}|$  が十分に小さく, かつ全ての拘束条件を満足している時には, 繰り返しを打ち切る。そうでない時には  $\mathbf{b}^{(k+1)}$  を

$b^{(k)}$  におきかえて, Step 2 に戻る。

## 6. 計算例

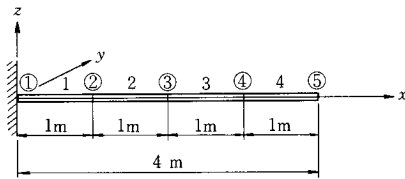
前述のアルゴリズムを用いて, はりおよびトラスが動荷重を受ける場合, 構造全体の重量を目的関数とする最適化を行い, 本理論により最適解が得られることを確認し, 静荷重を受ける場合との比較も行ったが, その結果を次に示す。

a) はり

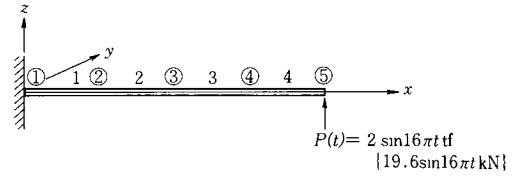
計算に用いたはり, **Fig. 2** に示すような片持ばりで, 4要素に分かれている。材料のヤング係数  $E$  および単位体積重量  $\rho$  は,  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \{206 \text{ GPa}\}$ ,  $\rho = 0.00785 \text{ kgf/cm}^3 \{77.0 \text{ kN/m}^3\}$  である。

部材は対称断面で, 断面2次モーメント  $I$  および断面係数  $Z$  は, 設計変数である部材断面積  $b$  の関数として,  $I = \phi b^2$  ( $\phi = 1.17$ ),  $Z = \psi b^{3/2}$  ( $\psi = 0.93$ ) とした。この  $\phi, \psi$  の値はH形鋼の規格値を参考として定めた。

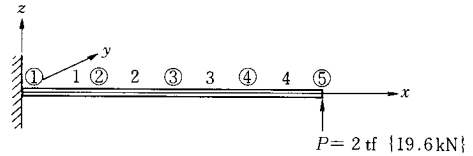
荷重は **Fig. 3** に示すように, 片持ばりの自由端(節点 5)に動荷重  $P(t) = 2 \sin 16\pi t \text{ tf} \{19.6 \sin 16\pi t \text{ kN}\}$  を載荷した。なお比較のために, 断面形状については4要素



**Fig. 2** Cantilever beam



**Fig. 3** Dynamic loading



**Fig. 4** Static loading

等断面のはりも対象とし, 荷重については **Fig. 4** に示す静的載荷状態も対象として最適化を行った。いずれの場合も自重は荷重として考えていない。

また拘束条件として, 応力については引張りも圧縮も共に  $1400 \text{ kgf/cm}^2 \{137 \text{ MPa}\}$  であり, 変位については等断面の自由端の変位(最大変位)  $3.33 \text{ cm}$  を参考にして  $3.30 \text{ cm}$  とした。

有限要素法で用いたはり要素の質量マトリックスおよび剛性マトリックスを付録に示す(減衰は考えていない)。

計算結果を **Table 1** に示す。表中○印はその断面が応力の拘束条件いっぱいであることを示す。この表を見ると次のようなことが分かる。

i) 等断面, 変断面にかかわらず, また拘束条件の種別によらず, 動的載荷状態の最適解は, 同一拘束条件の

**Table 1** Canitlever Beam.

Cross Sec.	Constant Cross Section		Variable Cross Section			
	Stress		Stress		Stress and Displacement	
	Static Loading	Dynamic Loading	Static Loading	Dynamic Loading	Static Loading	Dynamic Loading
$b_1$	○72.3 cm <sup>2</sup>	○85.4 cm <sup>2</sup>	○72.3 cm <sup>2</sup>	○96.7 cm <sup>2</sup>	89.0 cm <sup>2</sup>	107.7 cm <sup>2</sup>
$b_2$	72.3	85.4	○59.7	○75.9	71.9	82.4
$b_3$	72.3	85.4	○45.5	○53.8	51.9	55.2
$b_4$	72.3	85.4	○28.7	○31.2	○28.7	○30.7
Weight	227 kgf {2.225 kN}	268 kgf {2.627 kN}	162 kgf {1.588 kN}	202 kgf {1.980 kN}	190 kgf {1.862 kN}	217 kgf {2.127 kN}
Displacement (max)	3.33 cm	2.96 cm	4.62 cm	3.97 cm	3.30 cm*	3.30 cm*
Natural Frequency (1st)	16.5 Hz	17.9 Hz	21.9 Hz	26.9 Hz	25.9 Hz	29.3 Hz

Remarks: ○ stress constraint is tight.

\* maximum allowable displacement constraint is tight.

静的荷重状態の1.14~1.25倍の重さで、動的荷重状態の方が重く、慣性力の影響が顕著に現われている。最適化された構造物の1次の固有振動数も、動的荷重状態の方が静的な場合に較べて高くなっている。なお、動的荷重状態における外力の振動数は、静的および動的荷重状態で得られた最適状態における1次の固有振動数よりも低く設定している。

ii) 等断面では、静的および動的荷重状態共に、固定端側(要素1)が拘束応力いっぱいになっており、変断面で拘束条件が応力だけの場合には、いずれの要素も拘束応力いっぱいになっている。なお静的荷重状態で、等断面の断面積  $b_1 = 72.3 \text{ cm}^2$  が変断面の断面積  $b_1 = 72.3 \text{ cm}^2$  に等しいのは自重を考えていないからであり、当然のことと言える。

iii) 変断面で、応力と共に変位の拘束条件を課した場合には、静的および動的荷重状態で共に、自由端の鉛直変位(最大変位)が拘束変位いっぱいになっている。また変位を拘束されたために、剛性を上げる必要から、固定端側の要素の断面積が大きく増加しており、拘束応力に達しているのはいずれも自由端の要素4だけである。

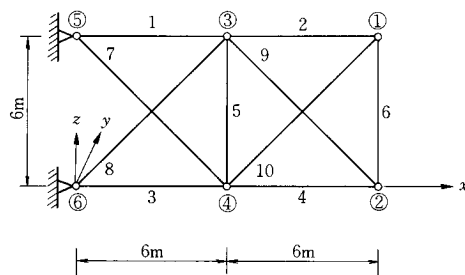
なお、変断面で静的荷重状態の時に、拘束条件によらず、自由端の要素4の断面積が  $28.7 \text{ cm}^2$  であるのは当然である。

#### b) トラス

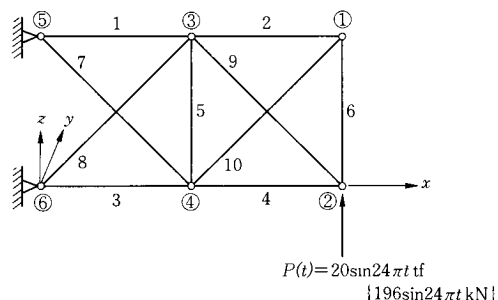
計算に用いたトラスは、**Fig. 5** に示すように、6節点10要素の片持ちトラスである。材料のヤング係数  $E$  および単位体積重量  $\rho$  は、はりの場合と同じく、 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$  [206 GPa]、 $\rho = 0.00785 \text{ kgf/cm}^3$  [77.0 kN/m<sup>3</sup>] である。

荷重は **Fig. 6** に示すように、節点2に  $z$  方向の動荷重  $P(t) = 20 \sin 24\pi t \text{ tf}$  [196  $\sin 24\pi t$  kN] を載荷した。なお、比較のために **Fig. 7** に示すように、節点2に静的な荷重  $P = 20 \text{ tf}$  [196 kN] を  $z$  軸の正の向き (**Fig. 7 (a)**) および負の向き (**Fig. 7 (b)**) に別々に載荷し、この2種類の荷重状態を同時に満足する場合の最適解も求めた(この状態を静的荷重状態と称する)。

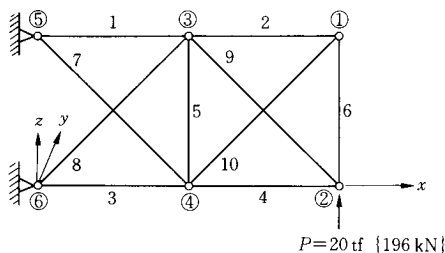
拘束条件としては、拘束応力は引張りも圧縮も共に  $1400 \text{ kgf/cm}^2$  [137 MPa] であり、さらに座屈としてはオイラー座屈を考慮した。このとき座屈応力の計算に必要な断面2次モーメント  $I$  は、設計変数である部材断面積の関数として、 $I = \varphi b^2$  ( $\varphi = 1.00$ ) とした。変位については、静的荷重状態で応力のみを拘束条件とした時の最大変位  $2.16 \text{ cm}$  の70%を取り  $1.50 \text{ cm}$  とした。また有限要素法で用いたトラス要素の質量マトリックスおよび剛性マトリックスを付録に示す(減衰は考えていない)。計



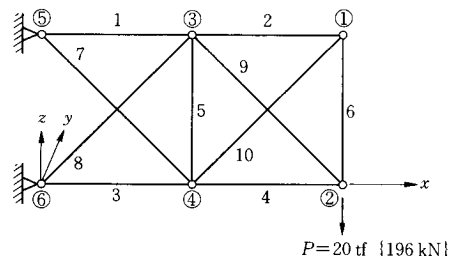
**Fig. 5** Cantilever truss



**Fig. 6** Dynamic loading



**(a)** Loading condition a



**(b)** Loading condition b

**Fig. 7** Static loadings

算結果を **Table 2** に示す。表中△は座屈応力で、○<sup>°</sup>は圧縮応力で、○<sup>°</sup>は引張応力で、拘束条件いっぱいになっていることを示す。また静的荷重状態の場合、△<sup>a</sup>は荷重  $P$  が上向きに作用している場合 (**Fig. 7 (a)**) に、また

Table 2 Cantilever Truss.

Cross Sec.	Constraints	Stress and Buckling		Stress, Buckling and Displacement	
	Loading State	Static Loadings	Dynamic Loading	Static Loadings	Dynamic Loading
$b_1$		$\triangle^a$ 23.3 cm <sup>2</sup>	$\bigcirc^c$ 34.9 cm <sup>2</sup>	48.8 cm <sup>2</sup>	78.5 cm <sup>2</sup>
$b_2$		$\triangle^a$ 11.7	$\triangle$ 14.4	12.0	12.8
$b_3$		$\triangle^b$ 22.3	$\bigcirc^f$ 33.8	40.4	65.3
$b_4$		$\triangle^b$ 14.5	$\triangle$ 15.9	19.5	29.2
$b_5$		$\triangle^b$ 3.9	$\triangle$ 5.2	$\triangle^b$ 2.2	$\triangle$ 3.0
$b_6$		$\triangle^a$ 11.7	$\triangle$ 11.7	12.0	$\triangle$ 9.7
$b_7$		$\triangle^a$ 20.7	$\triangle$ 29.3	$\triangle^a$ 18.6	25.0
$b_8$		$\triangle^b$ 23.6	$\triangle$ 27.7	30.8	53.4
$b_9$		$\triangle^a$ 24.5	$\triangle$ 28.4	27.6	38.1
$b_{10}$		$\triangle^b$ 19.6	$\triangle$ 21.4	$\triangle^b$ 18.2	19.7
Weight		1000 kgf {9.80 kN}	1257 kgf {12.32 kN}	1270 kgf {12.45 kN}	1843 kgf {18.06 kN}
Displacement (max)		2.16 cm	2.54 cm	1.50 cm*	1.50 cm*
Natural Frequency (1st)		27.5 Hz	30.0 Hz	31.2 Hz	34.3 Hz

Remarks:  $\triangle$  buckling stress constraint is tight.  
 $\triangle^a$  buckling stress constraint is tight under loading condition **a**.  
 $\triangle^b$  buckling stress constraint is tight under loading condition **b**.  
 $\bigcirc^c$  compressive stress constraint is tight.  
 $\bigcirc^f$  tensile stress constraint is tight.  
\* maximum allowable displacement constraint is tight.

$\triangle^b$  は荷重  $P$  が下向きに作用している場合 (Fig. 7 (b)) に、それぞれ座屈応力いっぱいになっていることを示している。このことから、次のようなことが判断される。

i) 最適設計の結果得られたトラスの最小重量は、拘束条件によらず、静的載荷状態よりも動的載荷状態の方が大きくなっており、これは慣性力の影響によるものである。最適化された構造物の 1 次の固有振動数は、静的載荷状態よりも動的載荷状態の場合の方が高い。なお、動的載荷状態における外力の振動数は、静的および動的載荷状態で得られた最適状態における 1 次の固有振動数よりも低く設定している。

ii) 変位拘束を考えない場合、静的載荷状態では各部材とも座屈応力で拘束条件いっぱいになっているが、動的載荷状態の場合には、部材 1 が圧縮応力で、また部材 3 が引張応力で拘束されている外は、いずれも座屈応力で拘束されている。

iii) 変位を拘束した場合には、静的載荷状態でも動的載荷状態でも、節点 2 の鉛直変位が拘束条件でおさえられている。さらに応力について言えば、静的載荷状態では部材 5, 7, 10 が、また動的載荷状態では部材 5, 6 が、

いずれも座屈応力で拘束されている。

## 7. あとがき

本文では、構造物が動的荷重を受ける場合にその構造物の動的応答量を考慮して最適化を行う手法を提案し、はりおよびトラスを対象とした計算例を示し、いずれも最適解が得られることを明らかにした。

また、比較のために静的載荷状態におけるはりおよびトラスの最適解も求め、動的載荷状態における慣性力の影響についても明らかにした。

なお、最適化の計算には傾斜射影法を、構造解析には有限要素法を、動的応答量の計算には Newmark の  $\beta$  法 ( $\beta = 1/6$ ) を用いている。

終りに、本計算には、東京電機大学計算センターの FACOM M-160、国士舘大学電子計算機センターの FACOM 230-38 を利用したことを付記する。

(原稿受付 昭和55年9月20日)

## 参考文献

- 1) Schmit, L. A.: Structural Design by Systematic



Synthesis, Proc. of the 2nd National Conf. on Electronic Computation, ASCE, Pittsburgh, 1960.

- 2) 中村恒善：建築骨組の最適設計，丸善，1980.
- 3) 山川 宏，奥村敦史：振動を考慮した構造物の最適設計について(1)～(4)，日本機械学会論文集，1976-4，1976-7，1977-8.
- 4) Haug, E. J.: Engineering Design Handbook, U.S. Army Materiel Development and Readiness Command, September 1977.
- 5) 松井邦人，山本一之：振動数要求を満たす構造物の最適化問題，第34回土木学会年次学術講演会，I-294，1979-10.
- 6) 松井邦人，山本一之：固有値を考慮した構造物の最適設計，第29回応用力学連合講演会，A112，1979-11.
- 7) Arora, J. S.: On Improving Efficiency of an Algorithm for Structural Optimization and a User's Manual for Program Trussopt 3, Technical Report No. 12, Department of Mechanics and Hydraulics, University of Iowa, September, 1976.
- 8) Bryson, A. E. Jr. and Ho, Y-C.: Applied Optimal Control, Ginn and Co., Waltham, Mass., 1969.
- 9) Rosen, J. B.: The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part I, Linear Constraints, SIAM Journal, Vol. 8, 181, 1960.
- 10) Rosen, J. B.: The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming, Part II, Nonlinear Constraints, SIAM Journal, Vol. 9, 514, 1961.
- 11) 小坪清真：土木振動学，森北出版，1973.
- 12) 小堀為雄：応用土木振動学，森北出版，1974.
- 13) 河島佑男：動的応答解析，コンピュータによる構造工学講座II-4-A，培風館，1972.
- 14) 菊田征勇，松井邦人，新延泰生：動的拘束条件を考慮した構造物の最適設計，第35回土木学会年次学術講演会，I-343，1980-9.
- 15) 菊田征勇，松井邦人，新延泰生：動的荷重下での構造物の最適化問題，第30回応用力学連合講演会，D28，1980-11.

## 付 録

### 1. 動的解析

初期条件(2)，(3)を有する運動方程式(1)および条件(21)，(22)を有する随伴方程式(20)は，解析的に解くことは非常に困難で，数値計算法が利用されるが，本文ではNewmarkの $\beta$ 法( $\beta = 1/6$ )を用いた<sup>11-13)</sup>。時間間隔 $\Delta t$ については， $\Delta t > 0$ として応答量 $\mathbf{z}(t)$ ， $\dot{\mathbf{z}}(t)$ ， $\ddot{\mathbf{z}}(t)$ を， $\Delta t < 0$ として応答量 $\lambda(t)$ を求めた。このとき $\Delta t$ としては，はりの場合には $\Delta t = 0.00006s$ ，トラスの場合には $\Delta t = 0.0005s$ とした。

また，動的過程を考える時間 $\tau$ は，はりの場合外力の

1/4周期 $0.03125s$ を参考にして $\tau = 0.048s$ とし，トラスの場合には外力の1周期 $0.0833s$ を参考にして $\tau = 0.1s$ とした(はり，トラスともに減衰は考えていない)。

### 2. 質量マトリックス・剛性マトリックス

本文で使用したはりおよびトラス要素の質量マトリックスおよび剛性マトリックスを次に示す。

#### a) はりの場合

Fig. 8に示す座標系を用いれば次のようになる。



Fig. 8 Beam element

#### i) 質量マトリックス

$$\mathbf{M}(b) = \frac{\rho l b}{420g} \begin{bmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ -22l & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ 54 & -13l & 156 & 22l \\ 13l & -3l^2 & 22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

#### ii) 剛性マトリックス

$$\mathbf{K}(b) = E\phi b^2 \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

#### b) トラスの場合

Fig. 9に示す座標系を用いれば次のようになる。

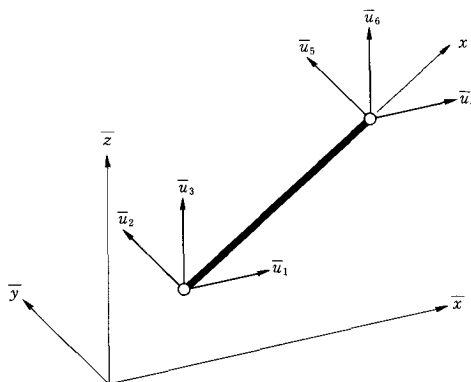


Fig. 9 Truss element

i) 質量マトリックス

$$\mathbf{M}(b) = \frac{\rho l b}{6g} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

ii) 剛性マトリックス

$$\mathbf{K}(b) = \frac{Eb}{l}$$

$$\times \begin{bmatrix} \lambda_{xx}\lambda_{xx} & \lambda_{xx}\lambda_{xy} & \lambda_{xx}\lambda_{xz} - \lambda_{xx}\lambda_{yx} - \lambda_{xx}\lambda_{zy} - \lambda_{xx}\lambda_{zx} \\ \lambda_{xy}\lambda_{xx} & \lambda_{xy}\lambda_{xy} & \lambda_{xy}\lambda_{xz} - \lambda_{xy}\lambda_{yx} - \lambda_{xy}\lambda_{zy} - \lambda_{xy}\lambda_{zx} \\ \lambda_{xz}\lambda_{xx} & \lambda_{xz}\lambda_{xy} & \lambda_{xz}\lambda_{xz} - \lambda_{xz}\lambda_{yx} - \lambda_{xz}\lambda_{zy} - \lambda_{xz}\lambda_{zx} \\ -\lambda_{xx}\lambda_{yx} & -\lambda_{xx}\lambda_{xy} & -\lambda_{xx}\lambda_{xz} & \lambda_{xx}\lambda_{xx} & \lambda_{xx}\lambda_{xy} & \lambda_{xx}\lambda_{xz} \\ -\lambda_{xy}\lambda_{xx} & -\lambda_{xy}\lambda_{xy} & -\lambda_{xy}\lambda_{xz} & \lambda_{xy}\lambda_{yx} & \lambda_{xy}\lambda_{xy} & \lambda_{xy}\lambda_{xz} \\ -\lambda_{xz}\lambda_{xx} & -\lambda_{xz}\lambda_{xy} & -\lambda_{xz}\lambda_{xz} & \lambda_{xz}\lambda_{yx} & \lambda_{xz}\lambda_{xy} & \lambda_{xz}\lambda_{xz} \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

なお、式 (A-1) ~ (A-4) において

$l$  : 部材長

$\rho$  : 単位体積重量

$b$  : 断面積

$\varphi$  : 断面 2 次モーメント  $I = \varphi b^2$  のパラメーター

$g$  : 重力加速度

$E$  : ヤング係数

$\lambda_{m\bar{n}}$  : 部材座標系の  $m$  軸が全体座標系の  $\bar{n}$  軸に対してなす方向余弦

である。